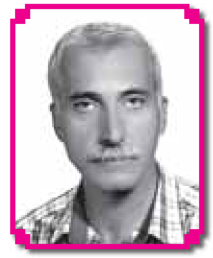


استدلال در هندسه

حسین کریمی

اشاره

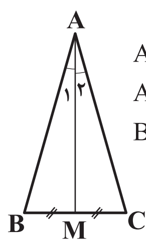
اخیراً مطلبی از یکی از اعضای هیئت تحریریه را مطالعه می‌کردم که با نثر بسیار روان و زیبایش مرا به بایگانی خاطراتم برد و به‌یاد تلاش و مشارکت دانش‌آموزان در سال‌های پیش افتادم که صدافسوس در این روزها کمتر و کمتر دیده می‌شود.

در سال‌های آغازین تدریس در یکی از مدرسه‌های شبانهٔ تهران مشغول تدریس هندسه بودم. دوران پرخاطره‌ای بود. دانش‌آموزانم مجموعه‌ای از دانش‌آموزان کاملاً ناهمگن بودند. بعضی از نظر سنی بزرگ و دارای فرزند بودند. بعضی‌ها پس از چند سال دوری از مدرسه، رو به تحصیل آورده بودند و تعدادی نیز مردودی‌های دورهٔ روزانه بودند که به دلیل نگرفتن نمرهٔ قبولی در یک یا چند درس، مجبور شده بودند که برای گذراندن یک پایه، برای چندمین سال متوالی سر کلاس حاضر شوند. بعضی از آن‌ها احاطهٔ خوبی روی مطالب هندسه داشتند و باعث ایجاد بحث‌های جالب و آموزنده‌ای در کلاس می‌شدند که بیان یکی از آن خاطرات، خالی از لطف نیست.

در شروع یکی از جلسات درس، دانش‌آموزی خواست که آخرین قضیهٔ جلسهٔ قبل را مجدداً اثبات کنم. ابتدا صورت قضیه و برهان آن را نوشتم:

قضیه: در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانهٔ وارد بر قاعده و نیم‌ساز زاویهٔ بین دو ساق برهم منطبق‌اند.

برهان: در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانهٔ وارد بر قاعدهٔ BC را AM می‌نامیم.



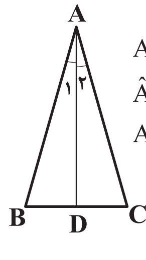
$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ AM = AM \\ BM = MC \end{array}\right\} \overset{\text{ض ض ض}}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{AMC} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$\Rightarrow$ AM نیم‌ساز $\hat{A}$ هم هست:

همان دانش‌آموز پرسید که در سال قبل، معلم ما به‌جای رسم میانهٔ AM، نیم‌ساز AD را رسم کرده بود. تکلیف ما چیست؟

از او خواستم که راه‌حل ارائه شده در پارسال را روی تخته بنویسد که به‌صورت زیر نوشت:

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نیم‌ساز زاویهٔ روبه‌رو به قاعده را AD می‌نامیم.



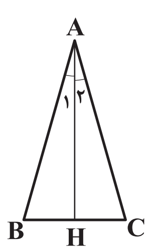
$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD = AD \end{array}\right\} \overset{\text{ض ز ض}}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ADC} \Rightarrow BD = DC$$

$\Rightarrow$ AD، میانهٔ وارد بر قاعدهٔ BC هم هست:

یکی از دانش‌آموزان گفت: فرقی نمی‌کند. در روش اول میانه را رسم کرده‌ایم و نشان داده‌ایم که نیم‌ساز هست و در روش دوم، نیم‌ساز را رسم کرده‌ایم و نشان داده‌ایم که نقش میانه را نیز دارد.

با تأیید گفته‌های او از بچه‌ها خواستم که برای اثبات قضیهٔ فوق روش دیگری به‌جز رسم میانه و نیم‌ساز ارائه دهند. فکر نمی‌کردم بچه‌ها پاسخ‌گو باشند، اما چند دقیقه بعد یکی از دانش‌آموزان ادعا کرد روش سوم را پیدا کرده است. از او خواستم که پای تخته بیاید.

روش سوم



در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع وارد بر قاعده را AH می‌نامیم. دو مثلث قائم‌الزاویه ABH و ACH به حالت وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه (AB=AC و AH مشترک) هم‌نهشت هستند. بنابراین: BH=HC، یعنی AH میانه نیز هست و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ یعنی AH نیم‌ساز زاویهٔ $\hat{A}$ هم هست.

در نتیجه میانه و نیم‌ساز در مثلث متساوی‌الساقین برهم منطبق‌اند.

فضای کلاس شور و هیجان خاصی به خود گرفته بود و من هم احساس خوبی داشتم که سبب شد سؤال جدیدی مطرح کنم:

آیا خاصیت فوق (انطباق میانه و نیم‌ساز) در دیگر مثلث‌ها (غیرمتساوی‌الساقین) نیز دیده می‌شود؟

دانش‌آموزی (از بزرگان کلاس) بلافاصله پاسخ داد که: بله، در مثلث متساوی‌الاضلاع هم صادق است، که پاسخ او با خندهٔ

بعضی از بچه‌ها مواجه شـــد. هم‌کلاســـی‌هایش به او گفتند که مثلث متســـاوی‌الاضلاع حالتی خاص از مثلث متساوی‌الســـاقین است و آن مثلث، غیرمتساوی‌الساقین محسوب نمی‌شود.

سکوت در کلاس حاکم شد. معلوم بود که هر یک به دنبال جواب هســـتند. از ردیف دوم کلاس یکی از بچه‌ها پرسید: می‌توانیم از مثال نقض اســـتفاده کنیم؟ همان موقع که می‌گفتم بله می‌توان اســـتفاده کرد، صدای ضعیفی شـــنیدم که یکی از بغل‌دستی‌هایش می‌پرسید: مثال نقض چیه؟

فرصت را مغتنم شمردم و مثال نقض را برای بچه‌ها یادآوری کردم و گفتم: به مثالی که نشـــان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی، نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. مثلاً فرض کنید یکی از شما به تجربه دیده که بیشـــتر عددهای اولی که با آن‌ها روبه‌رو شده است، عددهای فردی بوده‌اند، مثل ۳، ۵، ۷، ۱۱ و... پس حدس زده است که همهٔ عددهای اول فرد هستند. آیا این حدس درست است؟

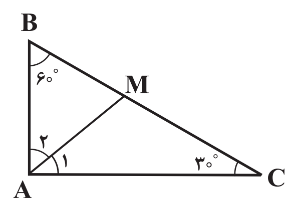
یکی از بچه‌ها گفت: نه آقا، مگر عدد ۲ اول نیست؟!

و من گفتم: احسنت! به این می‌گویند مثال نقض خوب! پس این حکم کلی درســـت نیست و نمی‌توان گفت که همهٔ عددهای اول فرد هستند.

بعد یکی دیگر از بچه‌ها دســـت بلند کرد و گفت: آقا من برای آن مسئلهٔ هندسه، مثال نقض پیدا کردم.

مثلـــث قائم‌الزاویـــهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$) را در نظـــر می‌گیریم و میانهٔ وارد بر وتر را AM می‌نامیم. می‌دانیم که میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} AM = \dfrac{BC}{۲} = MC \Rightarrow \hat{A}_{۱} = ۳۰^\circ \\ AM = \dfrac{BC}{۲} = BM \Rightarrow \hat{A}_{۲} = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_{۱} \neq \hat{A}_{۲}$$

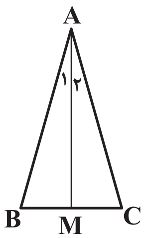


یعنی AM نیم‌ســـاز زاویهٔ A نیســـت. در نتیجه در مثال فوق که مثلث ABC غیرمتساوی‌الساقین است، میانه و نیم‌ساز برهم منطبق نیستند. پس نمی‌توان گفت که در هر مثلث این خاصیت برقرار است.

از طرفی با دیدن مشـــارکت خوب بچه‌ها ذوق زده شده بودم و از طرف دیگر نگران ســـپری شدن زمان محدود جلسهٔ آموزشی بودم که یکی از بچه‌ها سؤالی را مطرح کرد که مربوط به درس همان روز بود: آقا، عکس قضیه هم برقرار است؟ از او خواستم عکس قضیه را مطرح کنـــد. یعنی جای فرض و حکم را در قضیهٔ اول عوض کند و او چنین پاسخ داد:

عکس قضیه: اگر در مثلثی میانهٔ وارد بر یک ضلع، منطبق بر نیم‌ســـاز زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

سؤال اخیر نگرانی‌ام را رفع کرد و نفس راحتی کشیدم. فکر کردم که بهترین شرایط در کلاس فراهم شده است و می‌توانم با ادامهٔ روش قبلی، درس را هم به پیش ببرم. عکس قضیه را روی تخته نوشتم. بار دیگر سکوت در کلاس برقرار شد. بعضی‌ها منتظر بودند که من جواب بدهم و بعضی‌ها خودشان به دنبال جواب بودند که یکی از ردیف جلو دســـت بلند کرد و گفت که اثبات کرده است. از او خواستم اثباتش را بنویسد.



اثبات: مثلث ABC را که در آن AM میانه و نیم‌ساز است، در نظر می‌گیریم. به دلیل اینکه: $\hat{A}_{۱} = \hat{A}_{۲}$، AM=AM و BM=MC، نتیجـــه می‌گیریم که دو مثلث ABM و ACM هم‌نهشت هستند. پس: AB=AC.

بلافاصله رو به بچه‌ها گفتم: بچه‌ها، در اثبات دوســـتتان، اشکالی می‌بینید یا نه؟

دانش‌آموز ردیف چهارم گفت: به چه حالتی دو مثلث هم‌نهشـــت هستند؟

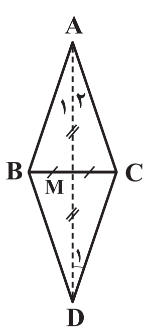
دانش‌آموز پای تخته پاسخ داد: به حالت دو ضلع و زاویهٔ ...

دانش‌آموز ردیف چهارم گفت: زاویه‌ای که بین آن دو ضلع نیست!

دانش‌آموز پای تخته گفت: حق با شماست، من اشتباه کردم. باید زاویه، بین آن دو ضلع باشد تا دو مثلث هم‌نهشت شوند.

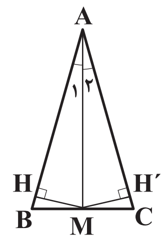
پس از نشســـتن آن دانش‌آموز، بقیه شـــروع به تلاش برای یافتن راه‌حل کردند. بعضی‌ها انفرادی و بعضی‌ها با بغل‌دستی‌شـــان مشغول بحث بودند.

گفتم: یک راهنمایـــی می‌کنم. میانه را به انـــدازهٔ خودش امتداد دهید. لحظاتی بعد دستی بالا رفت که من اثبات کردم و اثبات خود را به‌صورت زیر ارائه داد:



اثبات: در مثلث ABC، AM را که نیم‌ساز و میانه است، به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم. چهارضلعـــی ABDC متوازی‌الاضلاع اســـت (زیرا قطرهـــا منصف یکدیگرند)، پـــس: AB=CD (۱). چون AB و CD موازی و AD مورب اســـت، پس: $\hat{A}_{۱} = \hat{D}_{۱}$. از طـــرف دیگـــر داریـــم: $\hat{A}_{۱} = \hat{A}_{۲}$، بنابراین: $\hat{A}_{۲} = \hat{D}_{۱}$. یعنی در مثلث ACD داریم: AC=CD (۲).

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: AB=AC که نشان می‌دهد مثلث ABC متساوی‌الساقین است. پس از تأیید صحت درستی روش اثبات او، بچه‌ها مشغول رونویسی از روی تخته شدند. دقایقی بعد که مشغول پاک‌کردن تخته بودم تا درس را ادامه دهم، یکی از بچه‌ها گفت راه‌حل دیگری دارم که از او هم دعوت کردم، اثباتش را روی تخته بنویسد.



راه‌حل دوم: در مثلث ABC، AM را که نیم‌ساز و میانه است در نظر می‌گیریم و از M عمودهای MH و MH′ را به‌ترتیب بر AB و AC رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}=\hat{H}'=\text{۹۰}^\circ\\ \hat{A}_{\text{۱}}=\hat{A}_{\text{۲}}\\ AM=AM\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \overset{\Delta}{AMH}\cong \overset{\Delta}{AMH'} \Rightarrow MH=MH'$$

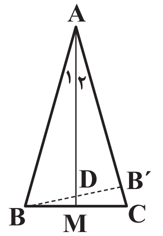
$$MH=MH',\ MB=MC,\ \hat{H}=\hat{H}'=\text{۹۰}^\circ$$
$$\Rightarrow \Delta MBH\cong \Delta MCH \Rightarrow \hat{B}=\hat{C} \Rightarrow AB=AC$$

همین که درستی اثبات را تأیید کردم و بچه‌ها مشغول نوشتن راه‌حل دوم بودند، یکی از هم‌کلاسی‌هایشان پرسید: آیا می‌توانیم از برهان خلف نیز استفاده کنیم؟ زمزمهٔ دیگری شنیده شد که باز هم از بغل‌دستی می‌پرسید: برهان خلف چیه؟ پاسخ دادم: بله، ولی اجازه بدین قبل از اثبات به روش برهان خلف، به منظور یادآوری برای آن‌هایی که فراموش کرده‌اند، یک‌بار دیگر برهان خلف را شرح دهم:

برهان خلف: برای اثبات یک قضیه می‌توانیم از اثبات غیرمستقیم که آن را برهان خلف می‌نامند، استفاده کنیم. در واقع فرض می‌کنیم حکم درست نباشد، یا به‌عبارت دیگر نقیض حکم درست باشد. نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه در تضاد است و از آنجا نتیجه می‌گیریم فرض درست بودن نقیض حکم مردود است.

ادامه دادم: این قضیه را با برهان خلف هم می‌توانید اثبات کنید، به این صورت:

AM را که میانه و نیم‌ساز مثلث ABC است، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم: AB≠AC (فرض خلف). روی ضلع بزرگ (مثلاً AC) نقطهٔ B′ را چنان اختیار می‌کنیم که: AB=AB′. حال در مثلث متساوی‌الساقین ABB′، AD که نیم‌ساز است، میانه هم هست. پس: BD=B′D. چون در مثلث BB′C، D وسط BB′ و M وسط BC است، بنابراین با توجه به عکس قضیهٔ تالس[1] داریم: DM||B′C یا به عبارت دیگر، AM (میانه) به موازات AC (یک ضلع از مثلث) رسم شده که غیرممکن است. لذا فرض AB≠AC مردود است و داریم: AB=AC.



بعد از آن بچه‌ها به ساعت‌هایشان نگاه کردند و گفتند: خب آقا، خسته نباشید!

من گفتم: ممنون، اما هنوز به یک سؤال من جواب نداده‌اید؟

بچه‌ها با تعجب گفتند: کدام سؤال؟! و من گفتم: آیا ویژگی منطبق بودن نیم‌ساز و میانه در مثلث‌های غیرمتساوی‌الساقین هم برقرار می‌شود؟

یکی از بچه‌ها تقریباً فریاد زد: آقا آن را که با مثال نقض رد کردیم! (و مثال نقض را با لحن خاصی ادا کرد.)

گفتم: نه بچه‌ها! مثال نقض نشان داد که این خاصیت در هر مثلثی برقرار نیست، اما از کجا می‌دانید که حتی یک مثلث غیرمتساوی‌الساقین نداریم که این خاصیت در آن برقرار باشد؟!

سکوت سنگینی کلاس را فراگرفت و من برای آنکه به اصطلاح جو را بشکنم گفتم:

چرا وحشت کردید! در واقع باید این حکم را بررسی کنید: «اگر مثلثی متساوی‌الساقین نباشد، آن‌گاه نیم‌ساز و میانهٔ هیچ رأس آن برهم منطبق نمی‌شوند.»

و آن وقت یکی از بچه‌ها گفت: آقا معلوم است دیگر! اگر نیم‌ساز و میانه برهم منطبق شوند که مثلث متساوی‌الساقین می‌شود!

و من گفتم: آفرین! در واقع از برهان خلف استفاده کردید و... و هنوز حرفم تمام نشده بود که زنگ کلاس به صدا درآمد!

برای اولین‌بار در آن کلاس بود که از به صدا درآمدن زنگ خاتمهٔ کلاس، نه من بلکه خیلی از دانش‌آموزان نیز ناراحت شدند.

از تک‌تک دانش‌آموزان آن کلاس ممنونم و شرمندهٔ آن‌ها هستم که متأسفانه نامشان در خاطرم نمانده بود که از آن‌ها با نام یاد کنم.

*** پی‌نوشت**

۱. عکس قضیهٔ تالس: هرگاه در مثلث ABC، M و N روی AB و AC چنان قرار داشته باشند که $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$، آن‌گاه: MN||BC.